

Clasificación subpixel desde una perspectiva ontológica

José Luis Silván Cárdenas

*Centro de Investigación en Geografía y Geomática Ing. Jorge L. Tamayo A.C. (CentroGeo)
Mexico City / Mexico*

Pablo López Ramírez

*Centro de Investigación en Geografía y Geomática Ing. Jorge L. Tamayo A.C. (CentroGeo)
Mexico City / Mexico*

RESUMEN

El presente artículo proporciona una síntesis de los enfoques más comunes en la percepción remota para el mapeo temático a nivel subpixel por medio de imágenes multispectrales/híperespectrales. Se revisan las bases ontológicas de los diferentes enfoques exponiendo las confusiones más comunes de términos relacionados tales como clasificación difusa, clasificación probabilística, demezclado espectral y clasificación subpixel. Se identifican las limitaciones y la fortaleza de cada ontología metodológica sugiriendo la necesidad de desarrollar un marco teórico más amplio que contemple al menos tres dimensiones para el manejo de la incertidumbre: incertidumbre de medición, incertidumbre de definición e incertidumbre de identificación. Así mismo, se propone la necesidad de implementar un proceso geocibernético para reconciliar los puntos de vista del productor y usuarios respecto a la definición de un sistema de clasificación.

Palabras claves: ontología, clasificación subpixel, clasificación suave, precisión temática.

ABSTRACT

This article provides a synoptic review of common approaches in remote sensing field for subpixel mapping by means multispectral/hyperspectral imagery. The ontological bases of each approach are revised by acknowledging the common confusion of related terms, such as fuzzy classification, probabilistic classification, spectral unmixing, and subpixel classification. Strengths and limitations of each method's ontology are identified, suggesting the need for a broader theoretical framework that encompasses at least three dimensions for handling the uncertainty: spatial uncertainty, thematic uncertainty and classification uncertainty. Likewise, the need for implementing a geo-cybernetic process is acknowledged when it comes to reconciling the producer's and user's views in the definition of a classification system.

Keywords: ontology, subpixel classification, soft classification, thematic accuracy.

1. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, un clasificador de la cobertura terrestre basado en imágenes asigna a cada pixel de la imagen una sola clase. En muchas aplicaciones, sin embargo, es necesario estimar la cobertura relativa de cada clase dentro del pixel (Atkinson, Cutler y Lewis 1997). Esto es particularmente cierto en el mapeo a nivel global o continental (Defries, Hansen y Townshend 2000), sobre todo debido a las limitaciones de ancho de banda que conllevan al uso de resoluciones espaciales del orden de decenas de metros y hasta un kilómetro (e.g., Landat MSS/TM/ETM+ con resoluciones en el rango 15-90 metros, SPOT en el rango 5-20 m, TERRA-ASTER en el rango 15-90 m y TERRA-MODIS a 250 m, 500 m y 1 km, y NOAA-AVHRR a 1 km). Dado que el campo instantáneo de vista (CIV) del sensor es suficientemente grande en relación a ciertos objetos, como casas, árboles y hasta cuerpos de agua, que conforman las clases de cobertura terrestre, el problema es inferir las proporciones de cobertura de cada clase dentro del CIV del sensor. A este procedimiento se le denomina clasificación de la cobertura en fracciones subpixel, o simplemente *clasificación subpixel*.

Aunque la cita más antigua sobre el tema data de principios de los 70s (Horowitz, y otros 1971), las técnicas de detección a nivel subpixel con fines de inteligencia militar fueron probablemente usadas muchos años antes. A pesar de su relativa antigüedad, los aspectos sobre como evaluar la precisión temática de las fracciones de cobertura no habían sido considerados ampliamente sino hasta hace algunos años, sobre todo con el advenimiento de los satélites comerciales de alta resolución espacial (IKONOS en 2000 con 1 y 4 m, QuickBird en 2001 con 60 cm y 2.4 m de resolución espacial y más reciente las series de GeoEye y WorldView con resoluciones similares o mayores) y la adopción generalizada del software para el manejo de información geográfica, que permiten la superposición de capas (overlay) con distintas resoluciones y formatos. En efecto, la disponibilidad de datos a mayor resolución espacial facilitó la evaluación temática de productos subpixel y permitió, incluso, establecer la relación entre los datos a diferentes resoluciones para predecir la distribución espacial de las clases dentro del pixel. De hecho, la clasificación subpixel es considerada como un precursor del mapeo a super-resolution, que no es otra cosa que una

clasificación dura producida a mayor resolución que la imagen original (Mertens, y otros 2006).

Este artículo proporciona una revisión crítica de los métodos de clasificación subpixel considerando como marco de referencia el clasificador suave, que es aquel que puede asignar varias clases a un mismo pixel. Así mismo, se distinguen las bases ontológicas de cada uno de los métodos revisados. Sobre todo, se reconoce que la comunidad científica involucrada en el desarrollo y aplicación de estas técnicas es tan diversa que cualquier intento de formalización del tema demanda la consideración de numerosos aspectos que van desde los conceptos ontológicos hasta los aspectos más pragmáticos. En la Sección 2 se presenta una discusión sobre los aspectos relacionados a la ontología de la clasificación subpixel. En la Sección 3 se presenta una revisión sinóptica de los métodos de clasificación subpixel más populares en la literatura de PR y SIG. Los métodos revisados son clasificados de acuerdo a la ontología de clasificación subyacente, proporcionando ejemplos de sus aplicaciones. Dada la restricción de espacio, este documento se limita a una descripción breve y general de la mayoría de los métodos en lugar de un tratamiento teórico exhaustivo. Como una excepción a esto, se proporcionan algunos detalles teóricos de un clasificador subpixel basado en un modelo no-lineal de mezclado espectral desarrollado recientemente (Silván-Cárdenas y Wang 2010). Sin embargo, para los detalles sobre cualquier otro método de interés se sugiere el seguimiento de las citas bibliográficas. La Sección 4 presenta las conclusiones derivadas de la revisión, identificando los problemas y oportunidades para futuros estudios.

2. BASES ONTOLÓGICAS

2.1 Ontología en análisis de imágenes

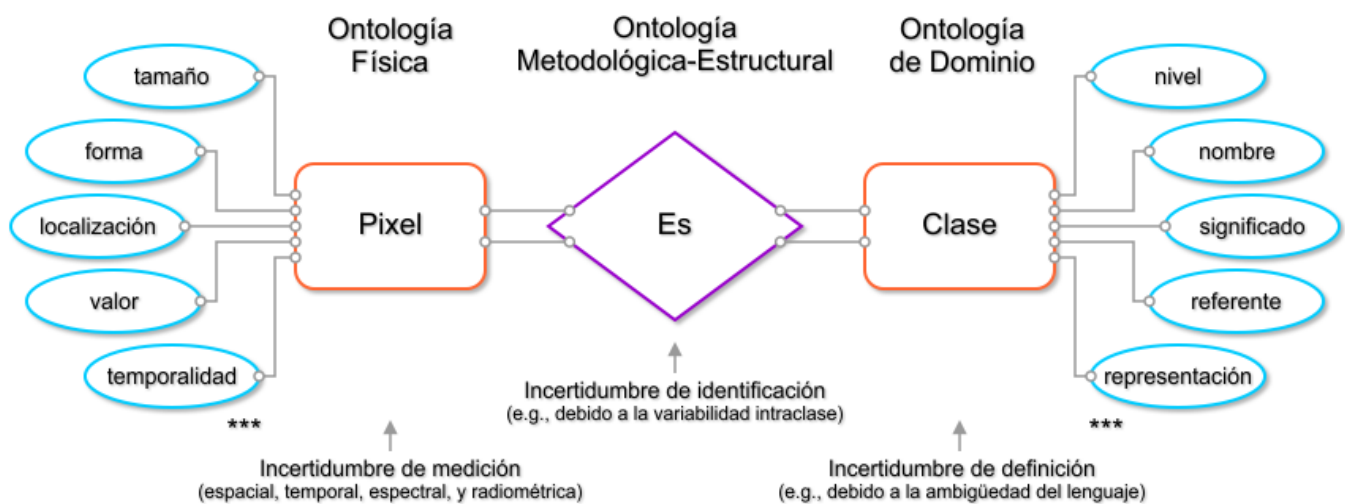
La extracción de información geográfica a partir de imágenes involucra varias componentes de incertidumbre cuya identificación demanda una formalización de la ontología subyacente (Bittner y Winter 1999). Camara y otros formalizan la ontología del análisis de imágenes a partir de un *dominio fenomenológico* y un *dominio de aplicación* (Camara, y otros 2001). El dominio fenomenológico se refiere a la *ontología de imagen per se*, mientras que el dominio de aplicación se refiere a una *ontología de dominio*. La ontología de imagen consta tres niveles: una *ontología*

física, una *ontología estructural* y una *ontología metodológica* (Camara, y otros 2001). Mientras la ontología física describe el proceso de creación de la imagen en términos físicos, la ontología estructural se refiere a la descripción de la imagen en términos de estructuras (primitivas geométricas y funcionales) tales como bordes, líneas, áreas, texturas, firmas espectrales, flujo óptico, etc. Por su parte, la ontología metodológica se refiere al conjunto de algoritmos necesarios para transformar los datos del nivel físico al nivel estructural. Las estructuras identificadas en la imagen tienen su correspondencia con entidades del paisaje, pero éstas últimas son definidas en el dominio de la aplicación (ontología de dominio). En este sentido, los proponentes enfatizan que la imagen tiene una ontología que es independiente del contexto de aplicación. Debe notarse, sin embargo, que la ontología estructural no es independiente del observador sino de su especialidad.

El proceso de clasificación, como método de extracción de información geográfica, puede ser visto como la definición de una relación entre los píxeles de la imagen y las clases. Esto se ilustra mediante el diagrama entidad-relación de la Figura 1, donde además se identifican tres niveles ontológicos que dan lugar a tres tipos de incertidumbre. Los rasgos específicos de dicha relación para una clasificación subpixel se discuten a continuación.

2.2 Pixel

Si bien el concepto de *pixel* (del término en inglés **picture element**) se originó con los dispositivos de visualización de imágenes digitales para denotar un elemento de imagen, la proliferación de las tecnologías digitales popularizó su uso en muchos contextos relacionados pero fundamentalmente diferentes. En PR este concepto se asocia generalmente al tamaño más pequeño que un sensor puede resolver o, más formalmente, a la representación digital del CIV del sensor (ontología física). Cabe mencionar que dicha asociación CIV-píxel se simplifica en la práctica ya que no considera las distorsiones causadas por un número de factores tales como variación del ángulo de vista por la topografía del terreno, la dispersión de la luz por efecto de la atmósfera, el movimiento inercial del satélite y la digitalización de la señal, entre otros (Bittner y Winter 1999). Para efectos de la definición de clasificación subpixel se asume que el píxel corresponde a un cuadrado perfecto (forma) de dimensiones fijas (tamaño) proyectado en la superficie terrestre (posición), al cual se asocian las mediciones radiométricas (valor) hechas durante un tiempo determinado (temporalidad).



Diseño conceptual: José Luis Silván Cárdenas

Figura 1. Diagrama entidad-relación del proceso de clasificación. Arriba se indican los niveles ontológicos correspondientes (adaptado de Cámara y otros 2001) y abajo los tipos de incertidumbre en cada nivel ontológico.

2.3 Clase

El otro concepto relevante en la relación de clasificación es el de *clase*. La definición de clases consiste en la identificación y caracterización de las entidades que conforman la cobertura terrestre y que son relevantes para una aplicación dada. De acuerdo con Smith y Mark (Smith y Mark 1998), la existencia de dichas entidades son generalmente el resultado de procesos cognitivos que involucran acuerdos (e.g., delegación política, suelo de conservación y manzana), mediciones u observaciones (e.g., área densamente poblada, selva baja y meseta) o análisis espacial (e.g., zonas de alto riesgo, desertificación y áreas de influencia). A estos objetos se denominan del tipo *fiat*. En contraste, las entidades que existen independientemente de la mente humana son denominados objetos del tipo *bona fide*, e.g., casa, carro, cuerpo de agua y árbol.

Desde el punto de vista de clasificación, es deseable contar con una definición clara de los tipos de cobertura terrestre en términos de propiedades observables. Evidentemente, uno no debe ignorar las características físicas y estructurales de los datos de imagen al momento de definir el sistema de clasificación. En la práctica, la definición de las clases involucra tanto rasgos que son observados en la imagen (ontología estructural y ontología física) como aspectos relacionados con su función en un contexto dado (ontología de dominio). Esto no solo dificulta establecer definiciones universales para los objetos geográficos del tipo *fiat* sino, además, contribuye al fenómeno de los *límites indefinidos*, el cual se verifica en el hecho de que una gran mayoría de personas pueden coincidir en la identificación correcta de una montaña o valle pero no en su definición ni en su delimitación.

En suma, la definición de objetos geográficos *per se* involucra procesos cognitivos tan complejos que resulta difícil responder a la pregunta ¿qué es cobertura terrestre? (Comber, Fisher y Wadsworth 2005). Así, cuestiones tan fundamentales como las reglas para definir un sistema de clasificación no están totalmente establecidas. Dichas reglas deberían ponderar los puntos de vistas encontrados del productor y del usuario: mientras el productor identifica los aspectos relevantes de cada clase en términos de las características del sensor (ontología física) y los algoritmos de extracción de rasgos (ontología

metodológica), el usuario se enfoca en los atributos funcionales que pueden ser interpretados tanto en la imagen (ontología estructural) como *in situ* (ontología de dominio).

2.4 Incertidumbre

A la ambigüedad de la definición de las clases de cobertura se le denominará *incertidumbre de definición*. Además de la incertidumbre de definición, los efectos de adquisición de la imagen (ontología física), e.g. resolución del sensor, ruido electrónico inherente de los componentes, efectos atmosféricos, efectos topográficos, etc., inciden directamente tanto en la localización, forma y tamaño del pixel (*incertidumbre de medición*), como en la definición de la relación Pixel-Es-Clase (*incertidumbre de identificación*). Esta última también es afectada por la estructura física de las superficies al producirse variabilidad espectral intraclase, incluso en objetos del tipo *bona fide*.

Debe notarse que la clasificación subpixel implica una representación (parcial) de la incertidumbre de medición dentro del pixel asumiendo que no existe incertidumbre de definición. Es decir, se asume que las fronteras de las clases, aunque no se puedan determinar a la escala (o tamaño) del pixel, están bien definidas a una escala más fina. A esto se ha denominado la *ontología subpixel* (Silván-Cárdenas y Wang 2008).

2.5 Clasificación Suave

La clasificación subpixel pertenece a una categoría de procesos de clasificación más general catalogada como *clasificación suave*. Una *regla de clasificación suave* asigna varias clases a un pixel, es decir, la relación Pixel-Es-Clase de la Ilustración 1 es de tipo ‘muchos a muchos’ (a diferencia de una *clasificación dura* donde la relación es de tipo ‘muchos a uno’). Como tal, la clasificación suave permite representar ciertos aspectos de la incertidumbre en los mapas temáticos que no se pueden representar mediante una clasificación dura. Cabe notar que la mayoría de los algoritmos de clasificación dura generan productos intermedios que representan clasificaciones suaves. Por ejemplo, el clasificador de máxima verosimilitud asigna la clase con mayor probabilidad *a posteriori*, la cual es calculada a partir de la regla de Bayes y la distribución multivariada Gaussiana. Dado el rango de valores de las probabilidades y de las fracciones de cobertura, uno

podría estar tentado a emplear dichas probabilidades para modelar las fracciones de cobertura.

La cuestión de si cualquier clasificador suave puede modelar apropiadamente las proporciones de cobertura dentro del pixel no es trivial. Es decir, no basta con que los valores asignados por un clasificador sean normalizables al rango unitario para que representen fracciones de cobertura. Schowengerdt sugiere que solo cuando la variación espectral intraclase en relación a la variación inter clase es suficientemente pequeña, y solo en ese caso, se puede atribuir las variaciones de similitud espectral a la presencia de diferentes proporciones de clases dentro del pixel (Schowengerdt 1996). A pesar de esto, muchos estudios evalúan la precisión de clasificaciones suaves usando la ontología subpixel (Atkinson, Cutler y Lewis 1997, Foody y Cox 1994, G. M. Foody 2000), es decir, usan grados de membresía o probabilidades (y no fracciones de cobertura), para estimar áreas. Aparentemente, existe confusión entre las diferentes ontologías de clasificación suave usadas en PR. Este artículo intenta

contribuir a la clarificación de dicha confusión examinando la ontología metodológica de cada enfoque de clasificación suave.

3. ENFOQUES DE CLASIFICACIÓN SUBPIXEL

Eastman y Laney identifican al menos tres enfoques para la clasificación subpixel, los cuales incluyen mezclado espectral lineal, métodos regresivos y métodos de clasificación suaves (Eastman y Laney 2002). A diferencia de esa categorización, la categorización presentada en esta sección evoca las bases ontológicas de cada método y los agrupa en cinco categorías: 1) Ontología Geométrica, 2) Ontología Probabilística, 3) Ontología de Lógica Difusa, 4) Ontología Física, y 5) Ontología de Aprendizaje Estadístico. Esta clasificación obedece a la interpretación inmediata de las fracciones derivadas y a la teoría subyacente usada para derivarlas. Los métodos de clasificación subpixel seleccionados para esta revisión se listan en la Tabla 1.

Clasificadores Subpixel	Ontología	Tesis	Características de Entrada/Salida
Distancia Espectral Angulo Espectral	Ontología Geométrica	La proximidad espectral implica proximidad en las fracciones de cobertura	Requiere: Firma espectral representativa de cada clase (<i>centroide</i>) Proporciona: Medidas de similitud espectral.
Máxima verosimilitud Esperanza-Maximización	Ontología Probabilística	La relación Pixel-Es-Clase es incierta, pero se puede modelar mediante la teoría de probabilidades	Requiere: Muestras espectrales de cada clase (para estimar <i>media y covarianza</i>) Proporciona: Probabilidades condicionales de clase dado el pixel.
C-medias difuso	Ontología de Lógica difusa	La definición de las clases es imprecisa, pero se puede modelar mediante la teoría de conjuntos difusos	Requiere: Pixeles cuya pertenencia a cada clase se pueda determinar sin ambigüedad (<i>centroide</i>) Proporciona: Membresía de clase.
Demezclado espectral lineal Demezclado espectral no lineal	Ontología Física	La respuesta espectral del sensor es producto de la mezcla sistemática de componentes espectrales puros que componen las clases	Requiere: Componentes espectrales puros (<i>endmembers</i>) Proporciona: Contribución relativa de los componentes espectrales puros a los pixeles mezclados.
Redes Neuronales Árboles de Regresión	Ontología de Aprendizaje Estadístico	La relación pixel-fracciones de cobertura es compleja, pero se puede interpolar a partir de ejemplos	Requiere: Firmas espectrales para cada clase con las fracciones de cobertura asociadas (<i>conjunto de entrenamiento</i>) Proporciona: Aproximación de fracciones de cobertura.

Fuente: José Luis Silván Cárdenas y Pablo López Ramírez.

Tabla 1. Métodos para clasificación de la cobertura en fracciones subpixel asignados a una de cinco categorías designadas a partir la ontología subyacente.

Desde un punto de vista operacional, los métodos de clasificación pueden ser *supervisados* o *no-supervisados*. Los métodos supervisados requieren un conjunto de firmas espectrales clasificadas que, dependiendo de la ontología de clasificación, se denominan conjuntos de entrenamientos, centroides, componentes espectrales puros, muestra estadística, etc. Los métodos seleccionados para esta revisión caen en la categoría de clasificación supervisada. Sin embargo, no se abunda sobre cómo seleccionar las firmas espectrales clasificadas para cada caso. Los métodos de clasificación también pueden ser *paramétricos* o *no paramétricos*. Los métodos *basados en modelos*, ya sean probabilísticos (e.g., máxima verosimilitud basada en una distribución Gaussiana) o determinísticos (e.g., el modelo de mezclado espectral lineal), son esencialmente métodos paramétricos porque requieren la estimación de parámetros para poder determinar la clasificación.

3.1 Ontología Física

Desde el punto de vista de la ontología física, los píxeles de la imagen resultan de la mezcla de componentes espectrales puros (*end-members*) presentes en el CIV del sensor (Adams, y otros 1995, Gillespie 1992, Milton 1999) y que están, en principio, asociados a las clases de cobertura. Si los componentes espectrales puros, y por lo tanto las clases, están espacialmente segregadas dentro del CIV, un fotón interactuará con un solo componente espectral antes de regresar al sensor, de tal forma que la luz integrada en el sensor se puede modelar como una combinación lineal de los componentes espectrales en el CIV. Así, las contribuciones relativas de los componentes espectrales al *pixel mezclado* de la imagen corresponderán a las fracciones de cobertura.

En la realidad, sin embargo, la luz interactúa en forma compleja con varios componentes espectrales de diferentes clases invalidando el modelo lineal. Esto es particularmente cierto en el caso de la cobertura vegetal. A pesar de ello, el modelo lineal de mezclado espectral goza de gran popularidad debido a que es relativamente fácil de invertir (Hu, Lee y Scarpace 1999, Keshava y Mustard 2002, Silván-Cárdenas y Wang 2010) y que proporciona estimaciones razonables de las fracciones de cobertura del dosel y del suelo descubierto (Adams, y otros 1995, Asner y Heidebrecht 2002). Para el caso de la vegetación, se han hecho

consideraciones más específicas en las cuales se toma en cuenta la interacción múltiple de la luz con los componentes de la vegetación y el suelo descubierto (Borel y Gerstl 1994, Smolander y Stenberg 2005). Dichos modelos son esencialmente no lineales en los componentes espectrales puros y ponen de manifiesto las limitaciones de la representación plana de la información de cobertura.

3.1.1 Demezclado espectral lineal

Para la inversión del modelo lineal existen varias alternativas (Hu, Lee y Scarpace 1999, Keshava y Mustard 2002, Chang y Heinz 2000, Heinz y Chang 2001, Silván-Cárdenas y Wang 2010), la mayoría de las cuales involucran la minimización del error cuadrático entre la predicción del modelo y la observación mediante el sensor de PR. Una diferencia fundamental entre los diferentes métodos de demezclado lineal recae en las restricciones impuestas en las fracciones a estimar, las cuales pueden ser la *no negatividad*, la *suma unitaria* o las dos simultáneamente. También existe un número significativo de variantes del modelo lineal cuya revisión exhaustiva cae fuera del alcance y foco de este artículo. Keshava (2003) y Keshava y Mustard (2002) proporcionan una revisión extensa de los métodos de demezclado espectral lineal.

Dado que la formulación del modelo lineal establece un número de ecuaciones lineales igual al número de bandas espectrales linealmente independientes (i.e., la dimensionalidad intrínseca de los datos), el número de componentes puros que permite una solución estable debe ser igual o menor que este número más uno, si se considera la restricción de suma unitaria de las fracciones. Por lo tanto, es común en la práctica definir entre dos y seis componentes puros para describir las clases de cobertura. Por ejemplo, en aplicaciones urbanas el modelo VIS de Ridd (*Vegetation-Impervious surface-Soil*) representa los tipos de cobertura en términos de fracciones de vegetación, superficie impermeable y suelo desnudo (Ridd 1995). En regiones áridas, el demezclado lineal se aplica para en el mapeo de las fracciones de tres componentes relevantes: vegetación fotosintéticamente activa, vegetación no-fotosintéticamente activa y suelo desnudo (Asner y Heidebrecht 2002), mientras que en regiones árticas las componentes son típicamente cuatro: nieve, coníferos, vegetación perene, y suelo desnudo (Vikhamar y

Solberg 2003). Otras aplicaciones del demezclado lineal incluyen la detección y mapeo subpixel de áreas devastadas por incendios forestales, detección de especies exóticas, concentración de sedimentos en cuerpos de agua, concentración de nitrógeno en regiones forestales, entre otras.

3.1.2 Demezclado espectral no-lineal

Cuando los componentes espectrales puros están en asociación estrecha, i.e., arreglados espacialmente a escalas menores que la longitud de onda de los fotones, la luz es dispersada múltiples veces por los componentes y la mezcla sistemática de dichos componentes resulta no lineal. Los efectos de la dispersión múltiple de la luz en medio porosos compuestos de minerales se estudiaban ya desde principio de los 70s, pero no fue sino hasta finales de los ochenta y principios de los noventa cuando se vislumbra la posibilidad de considerar dichos efectos en el estudio de la estructura del dosel y cuantificar los efectos del suelo desnudo en la reflectancia medida por sensores de PR (Borel y Gerstl 1994, Roberts, Smith y Adams 1993). Keshava y Mustard (2002) comentan que, en experimentos controlados de laboratorio, se ha observado que la aplicación del demezclado espectral lineal con datos que son sistemáticamente mezclados en forma no lineal puede representar errores de hasta un 30%. A pesar de su potencial, los modelos no lineales son raramente utilizados para el mapeo de cobertura a nivel subpixel. Esto es principalmente debido a la relativa complejidad de la inversión, a que se requiere conocer las propiedades de dispersión de la luz de cada componente, y a que un solo modelo no es generalizable para todos los tipos de cobertura.

Un modelo propuesto recientemente por Smolander y Stengberg para doseles de coníferas (Smolander y Stengberg 2005), permite expresar la relación entre la respuesta espectral del dosel a partir de la respuesta espectral de las hojas y parámetros estructurales que son considerados *espectralmente invariantes* (Huang, y otros 2007), i.e., no dependen de la longitud de onda (λ) de la radiación. Los proponentes consideran un dosel homogéneo compuesto solamente de hojas. En este caso, la dispersión de la luz a nivel del dosel $y(\lambda)$ (reflectancia más transmitancia) se relaciona con la dispersión de la luz a nivel de la hoja $x(\lambda)$ de la siguiente forma:

$$y(\lambda) = \frac{(1-p)x(\lambda)}{1-px(\lambda)} \quad (1)$$

donde p es la probabilidad media de que un fotón que es dispersado por la hoja vuelva a interactuar con el dosel. Silván-Cárdenas y Wang generalizaron este modelo para un número arbitrario de componentes espectrales, el cual se expresa en forma matricial de la siguiente forma (Silván-Cárdenas y Wang, Retrieval of subpixel Tamarix canopy cover from Landsat data along the Forgotten River using linear and nonlinear spectral mixture models 2010):

$$y_\lambda = (\mathbf{1} - \mathbf{P}\mathbf{1})^T (\mathbf{I} - \mathbf{X}_\lambda \mathbf{P})^{-1} \mathbf{X}_\lambda \boldsymbol{\alpha} \quad (2)$$

donde \mathbf{X}_λ es una matriz diagonal formada por las reflectancias de m componentes espectrales puros a la longitud de onda λ ; $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}$ es la matriz de probabilidades de re-colisión, i.e., p_{ij} es la probabilidad de que un fotón que ha interactuado con la i -ésimo componente espectral interactúe a continuación con el j -ésimo componente espectral; $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector de interceptancias, i.e., las fracciones de cobertura; y $\mathbf{1}$ es un vector columna formado de 1's. Al comparar el desempeño del demezclado no-lineal (basado en la ecuación 2) para la estimación de las fracciones de cobertura de una especie exótica (*Tamarix spp*) del Rio Bravo/Grande, se encontró que el modelo no lineal puede estimar las fracciones de cobertura de forma más precisa que el modelo lineal, siempre y cuando las componentes espectrales se midan a nivel sub dosel y no por encima del dosel. Esto representa una limitación de los métodos no lineales en general porque los componentes espectrales puros a nivel sub dosel pueden variar tremendamente de pixel a pixel, y también porque imposibilita la selección automática de los componentes espectrales a partir de la imagen.

3.2 Ontología Geométrica

En una ontología geométrica la definición de la relación Pixel-Es-Clase se hace a partir de la posición relativa del pixel dentro del espacio Euclidiano formado por las bandas espectrales de la imagen (*espacio espectral*). Estos métodos asignan la clase cuya firma espectral representativa (*centroide*) está más próxima a la del pixel. En cierta forma todos los clasificadores subpixel explotan la *proximidad espectral* para inferir las

proporciones de clase, es decir, asumen implícitamente una correspondencia entre la proximidad espectral y la proximidad de las fracciones de cobertura. Sin embargo, el uso directo de las medidas de proximidad espectral para el mapeo de las fracciones subpixel no ha sido evaluado ampliamente, quizá debido a la falta de una base teórica explicativa o al rango inapropiado de las medidas de proximidad para representar fracciones de cobertura.

3.2.1 Distancia Espectral

Entre las medidas de distancia espectral más común están la *distancia Euclidiana* y la *distancia de Mahalanobis*. Esta última es una extensión de la distancia Euclidiana ponderada por la matriz de covarianza de los datos (Richards y Jia 1999). Schowengerdt está entre los primeros en reconocer la utilidad potencial de las medidas de distancia espectral para inferir las fracciones de clases en el pixel (Schowengerdt 1996). Al comparar las medidas de proximidad derivadas por varios clasificadores duros, incluyendo la distancia Euclidiana, a partir de una imagen simulada Schowengerdt observó que todas las medidas de similitud evaluadas están relacionadas con las proporciones de cobertura en el pixel, pero dicha relación es esencialmente no lineal. El estudio concluye que las medidas de similitud pueden relacionarse con la fracción de cobertura siempre y cuando la variación intraclase no sea significativa.

3.2.2 Ángulo espectral

Una alternativa a las medidas de distancia es el ángulo espectral, es decir, el ángulo formado entre dos firmas espectrales, cuando son representadas en forma de vectores. Dentro de esta categoría están el mapeador del ángulo espectral (Kruse, y otros 1993) y el mapeador del coseno del ángulo espectral (Sohn y Rebello 2002). Una ventaja del ángulo espectral sobre las medidas de distancia es su invariancia al escalamiento de las firmas espectrales. Dicho escalamiento puede ser ocasionado por variaciones en la iluminación. Como en el caso de las medidas de distancia, el ángulo espectral es generalmente usado para producir clasificaciones duras usando la regla ‘el ganador se lleva todo’ (*the winner takes all*). Aunque el coseno del ángulo espectral cae naturalmente en el rango de las fracciones de cobertura, la suma de ellos no es necesariamente la

unidad y por lo tanto no resulta atractivo para la clasificación subpixel.

3.3 Ontología Probabilística

En la ontología probabilística de clasificación, un elemento es miembro de una y solo una clase, una clase bien definida en la que no existe ambigüedad en su definición. En este caso, la incertidumbre recae únicamente en la inhabilidad de identificar a cual clase pertenece un miembro dado. En otras palabras, existe incertidumbre, pero no en la definición de la clase, ni la localización del pixel, sino en la determinación de la relación Pixel-Es-Clase, y como tal asume una incertidumbre de identificación. Dicha incertidumbre puede ser debida a muchas razones, tales como a datos incompletos, a datos que no definen el espacio de la definición de las clases, o al traslape de las características entre clases distintas. Este último caso es el más típico del mapeo de la cobertura terrestre por medio de PR, donde se intenta mapear clases que no están necesariamente definidas en términos de características espectrales.

3.3.1 Máxima Verosimilitud

Un ejemplo prominente de esta categoría es la clasificación de *máxima verosimilitud* (CMV), que es quizá el procedimiento más usado en PR. El procedimiento de CMV convencional se basa en distribuciones de clases (Gaussianas) estimadas a partir de una muestra estadística. El método asigna a cada pixel la clase con mayor probabilidad *a posteriori*, dada la observación. La probabilidad de clase *a posteriori* refleja la frecuencia con que una firma espectral dada se asocia a la existencia de una clase en particular. Aunque este método es más comúnmente usado para generar clasificaciones duras, algunos estudios proponen el uso de la probabilidad de clase *a posteriori* como grado de membresía de clase (Foody, Campbell, y otros 1992), o para estimar la cobertura subpixel de clase (Schowengerdt 1996, Foody y Trodd 1996).

Son numerosos los estudios que proponen el uso de las probabilidades *a posteriori* como grados de membresía de clase (Eastman y Laney 2002, Foody, Campbell, y otros 1992, Wang 1990), confundiendo así los paradigmas de la teoría de probabilidades y la de conjuntos difusos. Desde luego, dichos paradigmas no son contradictorios, pero la relación entre las

probabilidades y grados de membresía es meramente arbitraria. Con lo que sí se debe ser cauteloso, es con la interpretación que se le da a la clasificación resultante. Por ejemplo, en los casos citados antes no es claro si el resultado de la clasificación refleja la incertidumbre en el sentido de una clasificación probabilística (elucidado arriba). Más aun, la evaluación de dichos métodos da por hecho que las fracciones resultantes deben corresponder con las fracciones de cobertura. Dichos estudios ignoran que la relación entre las probabilidades y las fracciones de clase son bastante contradictorias. Mientras las probabilidades *a posteriori* asumen y requieren que exista suficiente variabilidad intraclase (porque de otra forma no es posible invertir la matriz de covarianza), la estimación de las proporciones de clase requiere que la variabilidad espectral sea, en gran medida, debida a la presencia de dos o más clases con baja variabilidad intraclase o de otra forma el pixel no representaría la mezcla de información espectral de las diferentes clases (Schowengerdt 1996).

3.3.2 Esperanza-Maximización

Una alternativa en la línea del modelado de la relación Pixel-Es-Clase usando la ontología probabilística es el análisis de discriminantes en mezclas Gaussianas (Ju, Kolaczyk y Gopal 2003). En lugar de caracterizar cada clase usando una distribución Gaussiana, este método permite la representación de la distribución de cada clase como una combinación lineal de múltiples distribuciones Gaussianas con parámetros independientes. La estimación de los parámetros de la mezcla de Gaussianas se determina mediante un procedimiento conocido como *esperanza-maximización* (*expectation-maximization*), que maximiza, para una muestra estadística dada, una medida de verosimilitud condicional derivada del modelo de distribución de las clases. Los proponentes de este método han evaluado el uso de las probabilidades *a posteriori* como estimador de las fracciones de cobertura subpixel para varios tipos de vegetación y suelo desnudo. Los resultados comparativos sugieren una mejora respecto al uso de una sola distribución Gaussiana por clase, superando el método CVM e incluso al método de demezclado espectral lineal y al método basado redes neuronales ARTMAP (Carpenter, Gopal, y otros 1999).

Más recientemente, se han desarrollado formulaciones probabilísticas explícitas para la clasificación subpixel.

Estas formulaciones se refieren en la literatura como análisis bayesiano de mezcla espectral (Song 2005) y reflejan la conjunción de la ontología probabilística con la ontología física.

3.4 Ontología de Lógica Difusa

La clasificación difusa se basa en la teoría de conjuntos difusos o borrosos desarrollada por Zadeh (Zadeh 1965), los cuales permiten, en principio, representar clases ambiguamente definidas, e.g., “cuerpo de agua grande”, “suelo urbano”, “vegetación densa”. El proceso de clasificación en sí no es prescrito por la teoría de conjuntos difusos, sino que este último sirve como marco teórico para representar la ambigüedad temática ineludible en la definición de las clases de cobertura terrestre. Idealmente, un clasificador difuso asigna números reales en el rango de cero a uno, los cuales reflejan el grado de membresía de un elemento a una clase. Dichos grados de membresía resultan de la compresión de uno o más atributos a escalas ordinales. Por ejemplo, el atributo ‘densidad de vegetación’ de una cobertura de bosque se comprime en una variable lingüística que toma valores discretos y ordenados, tales como ‘alta’, ‘media’ o ‘baja’. Dicha compresión es típica de gran parte del razonamiento humano y se debe al fenómeno de *granularidad*, i.e., la descomposición del todo en sus partes (Sets 1997). Dada su escala de medición, el grado de membresía es una apreciación subjetiva y no algo que pueda estimarse con precisión, como en el caso de una probabilidad. Desde ese punto de vista, resulta bizarro hablar de la estimación de la cobertura subpixel por medio de clasificación difusa. A pesar de ello muchos autores proponen métodos de clasificación difusa –llamados así más por el hecho de representar una clasificación en valores que caen en el rango 0-1 que por su relevancia en el modelado de la relación Pixel-Es-Clase, pero vea (Gopal y Woodcock 1994) y (Melgani, Al Hashemy y Taha 2000)– para estimar las fracciones de cobertura de clase en el pixel.

3.4.1 C-medias difuso

Uno de los métodos más populares en la literatura afín es el método de C-medias difuso desarrollado por Bezdek, Ehrlich y Full (Bezdek, Ehrlich y Full 1984) e introducido a la comunidad de PR por Cannon, y otros (Cannon, y otros 1986). Aunque existen varias versiones del método, algunas de las cuales usan estrategias supervisadas, la idea general es minimizar una distancia

espectral normalizada, similar a la distancia de Mahalanobis ponderada por los grados de membresía elevados a un exponente, entre los píxeles de la imagen y los centroides. La modificación del algoritmo original no supervisado a supervisado consiste en especificar los centroides desde el principio y correr el método una sola vez. Foody y sus colaboradores han aplicado extensamente el método de Bezdek y sus variantes para la estimación de fracciones de cobertura de bosque tropical (Foody y Cox 1994, G. Foody 1994) y suelo urbano (G. M. Foody 2000, Zhang y Foody 1998, Zhang y Foody 2001). De cualquier forma es interesante notar que, en varios estudios comparativos, estas técnicas resultan ser más precisas que las técnicas basadas en modelos de mezclado espectral lineal (Atkinson, Cutler y Lewis 1997, Foody y Cox 1994, Bastin 1997). La razón se puede atribuir a la inclusión de relaciones complejas en la definición de los grados de membresía. Dado que la relación entre las fracciones de cobertura y la distancia espectral es esencialmente no lineal (Schowengerdt 1996), C-medias difuso resulta más flexible que el modelo de mezclado lineal y es capaz de ajustar mejor la relación entre dichas variables, pero no explica cómo la existencia de múltiples clases en el píxel produce los grados de membresía (o las distancias espectrales usadas para definir los grados de membresía).

3.5 Ontología de aprendizaje estadístico

En la ontología de aprendizaje estadístico la relación Pixel-Es-Clase se *aprende* a partir de ejemplos. Los métodos de aprendizaje implican una regresión directa entre las fracciones de cobertura y los píxeles de la imagen. En este caso, la regresión consiste en estimar parámetros óptimos de un modelo genérico. Estos métodos son, sin embargo, considerados no paramétricos por que el significado de los parámetros no tiene un referente fuera del ámbito estadístico. A estas técnicas a veces se les denomina técnicas de “caja negra” porque, aunque se basan en un modelo, dicho modelo no explica cómo se produce la relación entre las variables. Los métodos más comunes de aprendizaje estadístico son las *redes neuronales artificiales* (RNA) y *árboles de regresión* (AR). Erróneamente algunos autores se refieren a este tipo de clasificadores como demezclado espectral no lineal (Foody, Lucas, y otros 1997, Liu y Wu 2005).

3.5.1 Redes Neuronales Artificiales

En una clasificación subpíxel, las entradas de la red provienen de bandas espectrales de la imagen, y las salidas corresponden a las fracciones de cobertura de cada clase. La arquitectura más común de RNA es la de multicapas sin ciclos de retroalimentación (*multilayered feed-forward neural network*). Este tipo de redes se entrenan mediante el método supervisado conocido como retro-propagación del error (Rumelhart, Hinton y Williams 1986). También son comunes las redes del tipo ARTMAP desarrolladas por Carpenter (Carpenter, Grossberg y Reynolds, ARTMAP: Supervised Real-time Learning and Classification of Nonstationary Data by a Self-organizing Neural Network 1991), las cuales se basan en la teoría de resonancia adaptativa, que es un esquema de aprendizaje en el cual los entrenamientos sucesivos no interfieren con el “conocimiento” previamente adquirido.

Al evaluar las redes multicapas para la clasificación subpíxel mediante el sensor AVHRR, Atkinson Cutler y Lewis encontraron que una red multicapas alcanza mayor precisión que los métodos C-medias difuso y demezclado lineal (Atkinson, Cutler y Lewis 1997). Foody, Lucas, y otros han comentado sobre las ventajas de las RNA de no tener que definir firmas espectrales de componentes puros y la gran flexibilidad para ajustar relaciones no lineales (Foody, Lucas, y otros 1997). Carpenter y otros concluyeron que las redes ARTMAP son superiores a los esquemas tradicionales de máxima verosimilitud y el demezclado espectral lineal en el mapeo de la vegetación (Carpenter, Gopal, y otros 1999). Liu, Seto, y otros propusieron ART-MMAP, que es una variante de la red ARTMAP donde se modifica el método de aprendizaje (Liu, Seto, y otros 2004). Asimismo, reportaron una mejoría sobre ARTMAP y las redes multicapa en la clasificación subpíxel usando datos del sensor MODIS.

A pesar de tener un desempeño consistentemente superior a otros métodos, tales como clasificación difusa, demezclado espectral, y clasificación probabilísticas, las redes neuronales son foco de crítica en muchos estudios debido al enfoque de “caja negra”. La mayoría de los usuarios de las RNA coinciden que la principal limitación de su aplicación es la dificultad en determinar un número apropiado de neuronas y la arquitectura de la red.

3.5.2 Árboles de regresión

Los árboles de regresión son técnicas de clasificación estadística que bajo ciertas condiciones se equipara a las RNA. La teoría de árboles de regresión fue desarrollada por Breiman (Breiman 1984). En contraste a las redes neuronales, los árboles de regresión se construyen de forma automática mediante un proceso de partición binaria recursiva. El método subdivide progresivamente un conjunto de entrenamiento en grupos homogéneos mediante una *regla de partición binaria*. La regla de partición binaria minimiza una función de *costo-complejidad* que se expresa en términos de las desviaciones cuadráticas promedio en cada *hoja* (nodo terminal) y del tamaño del árbol (número de nodos).

En un estudio de mapeo de bosques, Huang y Townshend combinaron regresiones piesolineales con los árboles de regresión de Breiman, demostrando su efectividad en la clasificación subpixel (Huang y Townshend 2003). Asimismo, la flexibilidad de los árboles de regresión sobre los métodos convencionales CMV y C-medias difuso ha sido demostrada en pruebas de clasificación subpixel (Xu, y otros 2005). Liu, Seto, y otros compararon los árboles de regresión con redes neuronales multicapas y del tipo ARTMAP. Los resultados pusieron de manifiesto las limitaciones de los árboles de regresión para mapeos altamente no lineales, tal como la clasificación subpixel de datos adquiridos por MODIS (Liu, Seto, y otros 2004).

4. DISCUSIÓN

La revisión presentada en las secciones previas nos permite, por un lado, clarificar las sutiles diferencias entre diferentes tipos de clasificadores subpixel y, por otro, identificar algunos elementos que son necesarios para abordar el problema del modelado de la incertidumbre en productos derivados a partir de PR. En particular se proponen tres tipos de incertidumbre: 1) incertidumbre de definición, 2) incertidumbre de medición y 3) incertidumbre de identificación. Así mismo, se reconoce la necesidad de reconciliar las diferentes ontologías de clasificación y, por lo tanto, la integración de las teorías subyacentes.

Uno de los problemas que aparecen al modelar la incertidumbre en las tres dimensiones arriba mencionadas se debe a que la incertidumbre de definición es parte de la ontología de dominio, es decir,

la definición de las clases depende del objetivo del estudio y del dominio de conocimiento dentro del cual éste se realice. En consecuencia, aun cuando la incertidumbre de identificación pudiera modelarse desde el formalismo matemático de la teoría de las probabilidades, el fin último de la clasificación, que es el establecimiento de la relación Pixel-Es-Clase, estará sujeto siempre a criterios de interpretación que surgen de la ontología de dominio. Hasta ahora, la comunidad de PR ha intentado abordar este problema mediante clases generales definidas a partir de sus propiedades físicas o funcionales, sin embargo, este acercamiento se ha quedado corto dado que, por un lado, los tipos de cobertura en una escena particular pueden no estar representados dentro de dichas clases generales o bien dichas clases general pueden no tener sentido para un problema particular.

Una alternativa para abordar este problema es enmarcar la definición de clases dentro de un proceso geocibernético. Desde este punto de vista, la clasificación de una imagen no puede ser entendida como un proceso separado del contexto dentro del cual esa clasificación va a ser utilizada. Los actores involucrados en el uso de la información extraída de la imagen deben ser parte del desarrollo de la clasificación. En particular, debe hacerse explícito el proceso de negociación de significados que ocurre en la definición de las clases.

Desde la perspectiva geo-cibernética, el requerimiento de información de PR puede ser entendido como una demanda social planteada en términos laxos (carente de formalismo científico). En este sentido, una primera labor del experto será la de traducir dicha demanda de información en términos que puedan ser abordados científicamente, es decir, plantear una primera relación entre la ontología estructural de la imagen (los rasgos identificables) y la ontología de dominio (el requerimiento social). A partir de esta relación inicial, el productor de información debe incorporar el conocimiento (frecuentemente implícito) de los usuarios de la información en la refinación de la relación entre la ontología estructural y la ontología de dominio. Esta sucesiva refinación puede ayudarse de técnicas de mapeo colectivo como STRABO, en la que una clasificación dada (determinada por una relación estructural-dominio) es examinada conjuntamente por

los actores involucrados en la construcción y el uso de la clasificación, generando zonas en donde la clasificación tiene sentido para productores y consumidores de información y zonas en donde hay desacuerdo, de esta forma, iteraciones sucesivas del proceso de refinación producirán una relación entre las ontologías estructural y de dominio que satisfaga al mismo tiempo la necesidad inicial de información y el rigor científico necesario para producir dicha clasificación.

5. CONCLUSIONES

La información de la cobertura terrestre adquirida a través de PR es actualmente uno de los recursos más importantes para afrontar los retos de cambio climático global y establecer su relación con la actividad humana. Se ha dicho que el éxito de PR estará acotado por la precisión que pueda alcanzar para estimar variables que contribuyan a explicar dicha transformación. Sin duda, una de estas variables es la cobertura. La precisión con la que se puede mapear dicha cobertura depende de varios factores interrelacionados que van desde la definición de las clases de cobertura, las características del sensor, las técnicas de mapeo, y de la forma como se defina la precisión temática.

La revisión presentada en este artículo se centró en los métodos de clasificación subpixel desde una perspectiva ontológica. Entre los enfoques de clasificación subpixel considerados se identificaron dos ontologías de clasificación que contribuyen a la representación de la incertidumbre de definición (ontología de lógica difusa) y la incertidumbre de identificación (ontología probabilística). Aunque estos enfoques son formalizados a través de las teorías de probabilidades y conjuntos difusos, el valor del aparato teórico no ha sido explotado apropiadamente en la clasificación subpixel, principalmente porque dichas ontologías no se corresponden perfectamente con el problema de la clasificación subpixel, el cual representa parcialmente la incertidumbre de medición (i.e., la incertidumbre de localización de una clase dentro del pixel). Quizá es por ello que los enfoques empíricos de regresión directa resultan más ventajosos en términos de la precisión.

Finalmente, se propone modelar la relación entre la ontología estructural y la ontología de dominio como un proceso Geo-cibernético que permita definir el sistema

de clasificación dentro del contexto en el que dicha clasificación va a ser utilizada y para la reconciliación de las teorías que permitan representar la incertidumbre en tres ejes. Futuras investigaciones deberán explorar la implementación del esquema de mapeo colectivo propuesto.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen los comentarios y correcciones de la Dra. Carmen Reyes sobre una versión preliminar. El trabajo editorial de la Mtra. Ana Díaz también contribuyó a mejorar la redacción del manuscrito. La interactividad de la Figura 1 y la Tabla 1 de la versión en línea fue posible gracias al trabajo del diseñador Rafael García.

INFORMACION DE AUTOR

José Luis Silván Cárdenas es profesor investigador del CentroGeo. Recibió el grado de Ingeniero en Computación en 1998 y el grado de Maestro en Ingeniería Eléctrica en 2002 por la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Doctorado en Ciencias de Información Geográficas por la Universidad de Texas (2009). De 2009 a 2010 realizó una estancia posdoctoral en la Universidad de Nueva York en Búfalo. Durante su carrera ha recibido varios reconocimientos, incluyendo la medalla Alfonso Caso, otorgada por la UNAM y el Premio J. Warren Nystrom otorgado por la Asociación de Geógrafos Americanos en 2011. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI Nivel 1) y coautor de alrededor de cuarenta publicaciones, incluyendo un libro, tres capítulos de libros, artículos en revistas arbitradas y en memorias de conferencias. Entre sus temas de investigación destaca la extracción de información geográfica mediante el procesamiento de imágenes ópticas multispectrales y laser aerotransportado (LiDAR).

E-mail jlsilvan@centrogeo.org.mx

Pablo López Ramírez es actualmente investigador asociado A en el Centro de Investigación en Geografía y Geomática “Ing. Jorge L. Tamayo” (CentroGeo). Cuenta con los grados de Licenciatura en Física por la UNAM y de Maestría en Geomática por el CentroGeo. Se ha desempeñado como docente de las materias de Análisis Espacial y Sistemas de Información Geográfica en el posgrado impartido en dicha institución. Además de su

labor como docente ha formado parte de diversos equipos interdisciplinarios del CentroGeo, principalmente en el diseño y elaboración de prototipos tecnológicos para diferentes proyectos de vinculación. Sus principales temas de investigación han sido la construcción de bases de información geo-espacial y modelos de agregación para la generación de inventarios de emisiones de contaminantes y el desarrollo de herramientas socio-tecnológicas para la construcción de catálogos institucionales de información geo-espacial.

E-mail lopez@centrogeo.org.mx

REFERENCIAS

- Adams, J. B., y otros. «Classification of Multispectral Images Based on Fractions of Endmembers: Application to Land-Cover Change in the Brazilian Amazon.» *Remote Sensing of Environment* 52 (1995): 137-154.
- Asner, G. P., y K. B. Heidebrecht. «Spectral unmixing of vegetation, soil and dry carbon cover in arid regions: comparing multispectral and hyperspectral observations.» *International Journal of Remote Sensing* 23 (2002): 3939-3958.
- Atkinson, P. M., M. E. J. Cutler, y H. Lewis. «Mapping Subpixel Proportional Land Cover with AVHRR Imagery.» *International Journal of Remote Sensing* 18, n° 4 (1997): 917-935.
- Bastin, L. «Comparison of fuzzy c-means classification, linear mixture modelling and MLC probabilities as tools for unmixing coarse pixels.» *International Journal of Remote Sensing* 18, n° 17 (1997): 3629-3648.
- Bezdek, J. C., R. Ehrlich, y W. Full. «FCM: The fuzzy C-means clustering algorithm.» *Computers & Geosciences* 10, n° 2-3 (1984): 191-203.
- Bittner, T., y S. Winter. «On ontology in image analysis.» *Integrated Spatial Databases* (Springer), 1999: 168-191.
- Borel, C., y S. Gerstl. «Nonlinear Spectral Mixing Models for Vegetative and Soil Surfaces.» *Remote Sensing of Environment* 47 (1994): 403-416.
- Breiman, L. *Classification and Regression Trees*. London: Chapman & Hall/CRC, 1984.
- Camara, G., M. Egenhofer, F. Fonseca, y A. Vieira Monteiro. «What's in an Image?» *Spatial Information Theory* (Springer), 2001: 474-488.
- Cannon, R., J. Dave, J. Bezdek, y et al. «Segmentation of a Thematic Mapper Image Using the Fuzzy C-Means Clustering Algorithm.» *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, n° 3 (1986): 400-408.
- Carpenter, G. A., S. Gopal, S. Macomber, S. Martens, y C. E. Woodcock. «A Neural Network Method for Mixture Estimation for Vegetation Mapping.» *Remote Sensing of Environment* 70 (1999): 138-152.
- Carpenter, G. A., S. Grossberg, y J.H. Reynolds. «ARTMAP: Supervised Real-time Learning and Classification of Nonstationary Data by a Self-organizing Neural Network.» *Neural Networks* 4, n° 5 (1991): 565-588.
- Chang, C.-I., y D. C. Heinz. «Constrained Subpixel Target Detection of Remotely Sensed Imagery.» *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing* 38, n° 3 (2000): 1114-1159.
- Comber, A., P. Fisher, y R. Wadsworth. «What is land cover?» *Environment and Planning B: Planning and Design* 32 (2005): 199-209.
- Defries, R. S., M. C. Hansen, y J. R. G. Townshend. «Global continuous fields of vegetation characteristics: a linear mixture model applied to multi-year 8 km AVHRR data.» *International Journal of Remote Sensing* (Taylor & Francis) 21, n° 6 (2000): 1389-1414.
- Eastman, J., y R. Laney. «Bayesian Soft Classification for Subpixel Analysis: A Critical Evaluation.» *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* 68, n° 11 (2002): 1149-1154.
- Foody, G. M. «Estimation of subpixel land cover composition in the presence of untrained classes.» *Computers & Geosciences* 26, n° 4 (2000): 469-478.
- Foody, G. M., N. A. Campbell, N. M. Trodd, y et al. «Derivation and Applications of Probabilistic Measures of Class Membership from the Maximum-Likelihood Classification.» *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing* 58, n° 9 (1992): 1335-1341.
- Foody, G. M., R. M. Lucas, P. J. Curran, y M. Honzak. «Non-linear mixture modelling without end-members using an artificial neural network.» *International Journal of Remote Sensing* 18, n° 4 (1997): 937-953.
- Foody, G. M., y D. P. Cox. «Subpixel land cover composition estimation using a linear mixture model and fuzzy membership functions.» *International Journal of Remote Sensing* 15, n° 3 (1994): 619-631.
- Foody, G. M., y N. M. Trodd. «Representation of ecological trends in remotely sensed data: Relating the probability of class membership to canopy composition and a vegetation ordination.» *Geocarto International* 11, n° 1 (1996): 3-11.
- Foody, G. «Ordinal-level classification of subpixel tropical forest cover.» *Photogrammetric & Engineering and Remote Sensing* 60, n° 1 (1994): 61-65.
- Gillespie, A. R. «Spectral Mixture Analysis of Multi-Spectral Thermal Infrared Images.» *Remote Sensing of Environment* 42 (1992): 137-145.
- Gopal, S., y C. E. Woodcock. «Theory and Methods for Accuracy Assessment of Thematic Maps Using Fuzzy Sets.» *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* 60, n° 2 (1994): 181-188.
- Heinz, D. C., y C.-I. Chang. «Fully Constrained Least Square Linear Spectral Unmixing Analysis Method for Material Quantification in Hyperspectral Imagery.» *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 39, n° 3 (2001): 529-545.
- Horowitz, H. M., R. F. Nalepka, P. D. Hyde, y J. P. Morganstern. *Estimating the Proportion of Objects Within a Single Resolution Element of a Multispectral Scanner*. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan, 1971.
- Hu, Y. H., H. B. Lee, y F. L. Scarpace. «Optimal Linear Spectral Unmixing.» *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 37, n° 1 (1999): 639-644.
- Huang, C., y J. R. G. Townshend. «A stepwise regression tree for nonlinear approximation: applications to estimating subpixel land cover.» *International Journal of Remote Sensing* 24, n° 1 (2003): 75-90.

- Huang, D., Y. Knyazikhin, R. E. Dickinson, y et al. «Canopy Spectral Invariants for Remote Sensing and Model Applications.» *Remote Sensing of Environment* 106 (2007): 106-122.
- Ju, J., E. D. Kolaczyk, y S. Gopal. «Gaussian mixture discriminant analysis and subpixel land cover characterization in remote sensing.» *Remote Sensing of Environment* 84, nº 4 (2003): 550-560.
- Keshava, N. «Survey of Spectral Unmixing Algorithms.» *Lincoln Laboratory Journal* 14, nº 1 (2003): 55-78.
- Keshava, N., y J. F. Mustard. «Spectral Unmixing.» *IEEE Signal Processing Magazine* 19, nº 1 (2002): 44-57.
- Kruse, F. A., A. B. Lefkoff, J. B. Boardman, y et al. «The Spectral Image Processing System (SIPS) - Interactive Visualization and Analysis of Imaging Spectrometer Data.» *Remote Sensing of Environment* 44 (1993): 145-163.
- Liu, W., K.C. Seto, E.Y. Wu, S. Gopal, y C. E. Woodcock. «ART-MMAP: A Neural Network Approach to Subpixel Classification.» *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 42, nº 9 (2004): 1976-1983.
- Liu, W., y E. Y. Wu. «Comparison of Nonlinear Mixture Models: Subpixel Classification.» *Remote Sensing of Environment* 94 (2005): 145-154.
- Melgani, F., B. Al Hashemy, y S. Taha. «An explicit fuzzy supervised classification method for multispectral remote sensing images.» *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 38, nº 1 (2000): 287-295.
- Mertens, K. C., B. de Baets, L. P. C. Verbeke, y R. R. Wulf. «A sub-pixel mapping algorithm based on sub-pixel/pixel spatial attraction models.» *International Journal of Remote Sensing* 27, nº 15 (2006): 3293 - 3310.
- Milton, E. J. «Image Endmembers and the Scene Model.» *Canadian Journal of Remote Sensing* 25, nº 2 (1999): 112-120.
- Richards, J. A., y X. Jia. *Remote Sensing Digital Image Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- Ridd, M. K. «Exploring a V-I-S (vegetation-impervious surface-soil) model for urban ecosystem analysis through remote sensing: comparative anatomy for cities.» *International Journal of Remote Sensing* 16, nº 12 (1995): 2165-2185.
- Roberts, D. A., M. O. Smith, y J. B. Adams. «Green Vegetation, Non-Photosynthetic Vegetation and Soils in AVIRIS Data.» *Remote Sensing of Environment* 44 (1993): 255-269.
- Rumelhart, D. E., G. E. Hinton, y R. J. Williams. «Learning Representations by Back-Propagating Errors.» *Nature* 323 (1986): 533-536.
- Schowengerdt, R. A. «On the estimation of spatial-spectral mixing with classifier likelihood functions.» *Pattern Recognition Letters* 17 (1996): 1379-1387.
- Sets, E. «Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic.» *Fuzzy Sets and Systems* 90 (1997): 111-127.
- Silván-Cárdenas, JL, y L Wang. «Fully Constrained Linear Spectral Unmixing: Analytic Solution Using Fuzzy Sets.» *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing* 48, nº 11 (2010): 3992-4002.
- Silván-Cárdenas, JL, y L Wang. «Retrieval of subpixel Tamarix canopy cover from Landsat data along the Forgotten River using linear and nonlinear spectral mixture models.» *Remote Sensing of Environment* 114, nº 8 (2010): 1777-1790.
- Silván-Cárdenas, JL, y L Wang. «Subpixel Confusion-Uncertainty Matrix for the Assessment of Soft Classifications.» *Remote Sensing of Environment* 112 (2008): 1081-1095.
- Smith, B., y D.M. Mark. «Ontology and geographic kinds.» *Proc. Intl. Symposium on Spatial Data Handling*. Vancouver: Taylor and Francis, 1998.
- Smolander, S., y P. Stenberg. «Simple Parameterizations of the Radiation Budget of Uniform Bradleaved and Coniferous Canopies.» *Remote Sensing of Environment* 94 (2005): 355-363.
- Sohn, Y., y N. Rebello. «Supervised and unsupervised spectral angle classifiers.» *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing* 68, nº 12 (2002): 1271-1280.
- Song, C. «Spectral mixture analysis for subpixel vegetation fractions in the urban environment: How to incorporate endmember variability?» *Remote Sensing of Environment* 95, nº 2 (2005): 248-263.
- Vikhamar, D., y R. Solberg. «Snow-cover mapping in forests by constrained linear spectral unmixing of MODIS data.» *Remote Sensing of Environment* 88, nº 3 (2003): 309-323.
- Wang, F. «Fuzzy classification of remote sensing images.» *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 28, nº 2 (1990): 194-201.
- Xu, M., P. Watanachaturaporn, P. K. Varshney, y M. K. Arora. «Decision tree regression for soft classification of remote sensing data.» *Remote Sensing of Environment* 97, nº 3 (2005): 322-336.
- Zadeh, L. A. «Fuzzy Sets.» *Information and Control* 8 (1965): 338-353.
- Zhang, J., y G. Foody. «Fully-fuzzy supervised classification of sub-urban land cover from remotely sensed imagery: statistical and artificial neural network approaches.» *International Journal of Remote Sensing* 22, nº 4 (2001): 615-628.
- Zhang, J., y G. M. Foody. «A fuzzy classification of sub-urban land cover from remotely sensed imagery.» *International Journal of Remote Sensing* 19 (1998): 2721-2738.